HOSSAM GHANEM

(20) 8.2 Trigonometric integrals(B)

ثانيا تكاملات تحتوي على $\sec x$, $\tan x$

الحالة الأولى

تحتوي على $\sec x$ مرفوع لأس **زوجي** على الصورة $\tan^n x \sec^m x$ (لا يهم كون أس الـ tan زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب اثنان من الـ $\sec^m x$ و نحول الباقي إلى $\tan^2 x$ بالقانون $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

مثال :

1	هنا ا لـ $\sec^4 x$ ذات أس زوجي (4)	$\int \tan^3 x \ \sec^4 x \, dx$
2	تم سحب $\sec^2 x$ من $\sec^4 x$ فتصبح $\sec^2 x$	$\int \tan^3 x \ \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$
3	تم تحويل $\sec^2 x$ إلي $(1 + \tan^2 x)$	$\int \tan^3 x \ (1 + \tan^2 x) \cdot \sec^2 x \, dx$
4	استخدم التعويض	$t = \tan x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = \sec^2 x \, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$\int t^3 (1 + t^2) \cdot dt$

ملحوظات

-1 إذا كان الـ $\sec x$ مرفوعة للأس 2 خذها كلها مع dx و لا يتبقى شيئا

-2 $\sec^4 x = (\sec^2 x)^2 = (1 + \tan^2 x)^2$

-3 هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^2 x \ dx$, $\int \sec^4 x \ dx$ أيضا

الحالة الثانية

تحتوي على $\tan x$ مرفوع لأس **فردي** على الصورة $\tan^n x \sec^m x$ (لا يهم كون أس الـ sec زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب واحدة من الـ$\sec x$ و واحدة من الـ $\tan x$ ونحول باقي الـ$\tan x$ إلي $\sec x$ بالقانون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

مثال :

1	هنا ا لـ $\tan^3 x$ ذات أس فردي (3)	$\int \tan^3 x \ \sec^3 x \, dx$
2	تم سحب $\tan x \sec x$ من $\tan^3 x \ \sec^3 x$ فتصبح $\tan^2 x \ \sec^2 x$	$\int \tan^2 x \ \sec^2 x \cdot \tan x \sec x \, dx$
3	تم تحويل $\tan^2 x$ إلي $(\sec^2 x - 1)$	$\int (\sec^2 x - 1) \ \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$
4	استخدم التعويض	$t = \sec x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = \tan x \sec x \, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$\int (t^2 - 1) \ t^2 dt$

ملحوظات

-1 $\tan^4 x = (\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$

-2 هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \tan^3 x \sec x \ dx$ أيضا

ثالثا تكاملات تحتوي على $\cot x$, $\csc x$

الحالة الأولى

تحتوي على $\csc x$ مرفوع لأس **زوجي** على الصورة $\cot^n x \csc^m x$ (لا يهم كون أس الـ cot زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب اثنان من الـ $\csc^m x$ و نحول الباقي إلى $\cot^2 x$ بالقانون $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

مثال :

$\int \cot^5 x \csc^4 x\, dx$	هنا الـ $\csc^4 x$ ذات أس زوجي (4)	1
$\int \cot^5 x \csc^2 x \cdot \csc^2 x\, dx$	تم سحب $\sec^2 x$ من $\csc^4 x$ فتصبح $\csc^2 x$	2
$\int \cot^5 x (1+\cot^2 x) \cdot \csc^2 x\, dx$	تم تحويل $\csc^2 x$ إلي $(1+\cot^2 x)$	3
$t = \cot x$	استخدم التعويض	4
$dt = -\csc^2 x\, dx$ $-dt = \csc^2 x\, dx$	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	5
$-\int t^5 (1+t^2) \cdot dt$	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	6

ملحوظات

1- إذا كان الـ $\csc x$ مرفوعة للأس 2 خذها كلها مع dx ولا يتبقى شيئا

2- $\csc^4 x = (\csc^2 x)^2 = (1+\cot^2 x)^2$

3- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \cot^{\frac{3}{2}} x \csc^2 x\, dx$, $\int \csc^4 x\, dx$ أيضا

الحالة الثانية

تحتوي على $\cot x$ مرفوع لأس **فردي** على الصورة $\cot^n x \csc^m x$ (لا يهم كون أس الـ csc زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب واحدة من الـ$\csc x$ و واحدة من الـ $\cot x$ ونحول باقي الـ$\cot x$ إلي $\csc x$ بالقانون $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

مثال :

$\int \cot^3 x \csc^{\frac{3}{2}} x\, dx$	هنا الـ $\cot^3 x$ ذات أس فردي (3)	1
$\int \cot^2 x \csc^{\frac{1}{2}} x \cdot \cot x \csc x\, dx$	تم سحب $\cot x \csc x$ من $\cot^3 x \csc^{\frac{3}{2}} x$ فتصبح $\cot^2 x \csc^{\frac{1}{2}} x$	2
$\int (\csc^2 x - 1) \csc^{\frac{1}{2}} x \cot x \csc x\, dx$	تم تحويل $\cot^2 x$ إلي $(\csc^2 x - 1)$	3
$t = \csc x$	استخدم التعويض	4
$dt = -\cot x \csc x\, dx$ $-dt = \cot x \csc x\, dx$	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	5
$-\int (t^2 - 1)\, t^{\frac{1}{2}} dt$	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	6

ملحوظات

1 - $\cot^4 x = (\cot^2 x)^2 = (\csc^2 x - 1)^2$

2- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \cot^3 x \csc x\, dx$ أيضا

Example 1 Evaluate the following integral $\int \frac{\sec^4 x}{1-\sec^2 x}\,dx$ 1 May 1994

Solution

$$I=\int \frac{\sec^4 x}{1-\sec^2 x}\,dx=\int \frac{\sec^2 x}{1-\sec^2 x}\cdot \sec^2 x\ dx=\int \frac{(1+\tan^2 x)}{-\tan^2 x}\cdot \sec^2 x\ dx$$

Let $u=\tan x$ $du=\sec^2 x\ dx$

$$I=-\int \frac{1+u^2}{u^2}\,du=-\int u^{-2}+1\cdot du=u^{-1}-u+c=\cot x-\tan x+c$$

Example 2 Evaluate the following integral $\int \frac{\sec^6 x}{\sqrt[3]{\tan^2 x}}\,dx$ 26 July 2007

Solution

$$I=\int \frac{\sec^6 x}{\sqrt[3]{\tan^2 x}}\,dx=\int \frac{\sec^4 x}{\tan^{\frac{2}{3}} x}\cdot \sec^2 x\ dx=\int \frac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan^{\frac{2}{3}} x}\cdot \sec^2 x\ dx$$

Let $u=\tan x$ $\rightarrow$ $du=\sec^2 x\ dx$

$$I=\int \frac{(1+u^2)^2}{u^{\frac{2}{3}}}\,du=\int \frac{1+2u^2+u^4}{u^{\frac{2}{3}}}\,du=\int \left(u^{-\frac{2}{3}}+2u^{\frac{4}{3}}+u^{\frac{10}{3}}\right)du$$

$$=3u^{\frac{1}{3}}+\frac{6}{7}u^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{13}u^{\frac{13}{3}}+c=3\tan^{\frac{1}{3}} x+\frac{6}{7}\tan^{\frac{7}{3}} x+\frac{3}{13}\tan^{\frac{13}{3}} x+c$$

Example 3 Evaluate the following integral $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$ 44 July 2007

Solution

$$I=\int \frac{\sec x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx=\int \frac{\sec x}{\sqrt{2\sin x\ \cos x}}\,dx=\int \frac{\sec x}{\frac{\cos x}{\cos x}\sqrt{2\sin x\ \cos x}}\,dx=\int \frac{\sec x}{\frac{\cos x}{1}\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}}\,dx$$

$$=\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$$

Let $u=\tan x$ $\rightarrow du=\sec^2 x\ dx$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{u}+c=\sqrt{2}\sqrt{u}+c=\sqrt{2\tan x}+c$$

Example 4 Evaluate the following integral $\int \tan^3 x\sec^{\frac{-3}{2}} x\,dx$ 30 July 2003

Solution

$$I=\int \tan^3 x\sec^{\frac{-3}{2}} x\,dx=\int \tan^2 x\sec^{\frac{-5}{2}} x\cdot \sec x\tan x\ dx=\int (\sec^2 x-1)\sec^{\frac{-5}{2}} x\cdot \sec x\tan x\ dx$$

Let $u=\tan x$ $du=\sec x\tan x\ dx$

$$I=\int (u^2-1)\cdot u^{\frac{-5}{2}}\,du=\int u^{\frac{-1}{2}}-u^{\frac{-5}{2}}\,du=2u^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{-3}{2}}+c$$

$$=2\sec^{\frac{1}{2}} x+\frac{2}{3}\sec^{\frac{-3}{2}} x+c$$

Example 5 Evaluate the following integral $\int \frac{x\, e^{x^2}}{1+\cos\left(e^{x^2}\right)} dx$ 40 May 2006

Solution

Let $u = e^{x^2}$ $du = 2x\, e^{x^2}\, dx$ $\frac{1}{2}\, du = x\, e^{x^2}\, dx$

$$I = \int \frac{x\, e^{x^2}}{1+\cos(e^{x^2})} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\cos u} du = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos u}{(1+\cos u)(1-\cos u)} du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos u}{1-\cos^2 u} du = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos u}{\sin^2 u} du \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot du = \frac{1}{2}\int \csc^2 u - \csc u \cot u \cdot du$$

$$= \frac{-1}{2}\cot u + \frac{1}{2}\csc u + c = \frac{1}{2}\csc e^{x^2} - \frac{1}{2}\cot e^{x^2} + c$$

Example 6 Evaluate the following integral $\int \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} dx$

Solution

$$I = \int \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} dx = \int \frac{(1-\sin 2x)}{(1+\sin 2x)} \cdot \frac{(1-\sin 2x)}{(1-\sin 2x)} dx = \int \frac{1-2\sin 2x+\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{1-2\sin 2x+\sin^2 2x}{\cos^2 2x} dx = \int (\sec^2 2x - 2\sec 2x \tan 2x + \tan^2 2x)\ dx$$

$$= \int (\sec^2 2x - 2\sec 2x\tan 2x + \sec^2 2x - 1)\ dx = \int (2\sec^2 2x - 1 - 2\sec 2x \tan 2x)\ dx$$

$$= \tan 2x - x - \sec 2x + c$$

Example 7 Evaluate the following integral $\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\, dx$

Solution

$$I = \int \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}\ dx = \int \frac{\sqrt{(1-\cos x)(1-\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}\ dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{(1-\cos x)^2}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\ dx = \int \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}\ dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin x}\ dx = \int (\csc x - \cot x)\ dx$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x| + c$$

Example 8 Evaluate the following integral $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$ 9 May 1997

Solution

$$I = \int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}\ dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin x}}\ dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\ dx$$

Let $u = 1-\sin x$ $du = -\cos x\ dx$ $-du = \cos x\ dx$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1-\sin x} + c$$

Example 9 Evaluate the following integral $\int \frac{\csc^4 x}{\sqrt{\cot x}} dx$ 40 May 2006

Solution

$$I = \int \frac{\csc^4 x}{\sqrt{\cot x}} dx = \int \frac{\csc^2 x}{\cot^{\frac{1}{2}} x} \cdot \csc^2 x \ dx = \int \frac{1+\cot^2 x}{\cot^{\frac{1}{2}} x} \cdot \csc^2 x \ dx$$

Let $u = \cot x$ $du = -\csc^2 x \ dx$

$$I = -\int \frac{1+u^2}{u^{\frac{1}{2}}} du = -\int \left(u^{\frac{-1}{2}} + u^{\frac{3}{2}}\right) du = -2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} u^5 + c = 2 \cot^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{5} \cot^{\frac{5}{2}} x + c$$

Example 10 Evaluate the following integral $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx$ 27 Dec. 2002

Solution

$$I = \int \cot^3 x \csc^3 x \, dx = \int \cot^2 x \csc^2 x \cdot \cot x \csc x \ dx = \int (\csc^2 x - 1) \csc^2 x \cdot \cot x \csc x \ dx$$

Let $u = \csc x$ $du = -\csc x \cot x \ dx$

$$I = -\int (u^2 - u) u^2 \ du = -\int (u^4 - u^2) \ du = -\frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} \csc^3 x - \frac{1}{5} \csc^5 x + c$$

Example 11 Evaluate the following integral $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ 40 May 2006

Solution

$u = x$ $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

$du = dx$ $v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

$$v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int \cot x \csc^2 x \ dx$$

Let $t = \cot x$ $dt = -\csc^2 x \ dx$

$$v = -\int u \ du = \frac{-1}{2} u^2 + c = \frac{-1}{2} \cot x + c$$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$\therefore I = \frac{-1}{2} x \cot x + \frac{1}{2} \int \cot x \ dx = \frac{-1}{2} x \cot x + \frac{1}{2} \ln \sin x + c$$

Example 12 Evaluate the following integral $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$

Solution

$t = \ln(\tan x)$ $\rightarrow dt = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \ dx = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \ dx = \frac{1}{\sin x \cos x} \ dx$

$$I = \int t \ dt = \frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} [\ln(\tan x)] + c$$

Homework

1	Evaluate the integral	$\int \frac{e^{-2\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$	
2	Evaluate the integral	$\int \left(\frac{\sec x}{\tan x}\right)^4 dx$	43 May 2007
3	Evaluate the integral	$\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt[3]{\tan x}}\,dx$	35 December 2004 A
4	Evaluate the integral	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,dx$	
5	Evaluate the integral	$\int \frac{\sec^4 x}{(\cot x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$	10 August 1997
6	Evaluate the integral	$\int \frac{\sec^6 x}{\sqrt[3]{\tan^2 x}}\,dx$	
7	Evaluate the integral	$\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$	31 December 2003
8	Evaluate the integral	$\int \tan^3 2x \sec^{\frac{3}{2}} 2x\,dx$	17 July 1999
9	Evaluate the integral	$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$	
10	Evaluate the integral	$\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$	20 April 2000
11	Evaluate the integral	$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$	
12	Evaluate the integral	$\int \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\,dx$	

Homework

13	Evaluate the integral $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$	
14	Evaluate the integral $\int \sqrt{\cot x}\, \csc^6 x\, dx$	
15	Evaluate the integral $\int \frac{\csc^4 x}{\sqrt[3]{\cot x}} dx$	28 May 2003
16	Evaluate the integral $\int \cot^3 x \csc^4 x\, dx$	25 December 2001
17	Evaluate the integral $\int \cot^3 x \csc^{\frac{-3}{2}} x\, dx$	36 June 2005
18	Evaluate $\int (\cos^{32} x \sin^{30} x - \cos^{30} x \sin^{32} x)\, dx$	
19	Evaluate the following integral : ($3\frac{1}{2}$ points) $\int \sqrt[3]{\tan x}\, \sec^4 x\ \ dx$	50 Dec. 15, 2009
20	(a) Verify that [2 marks] $$\int \sec^3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}[\sec\theta\tan\theta + \ln\lvert\sec\theta + \tan\theta\rvert] + C.$$ (b) Use the substitution $x = \tan^4\theta$ to evaluate the integral [3 marks] $$\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$$	52 July 24, 2010
21	Evaluate the following integral $\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\ dx$	54 12/05/2011
22	Evaluate the following integral $\int (\sin x)^{-4}\sqrt{\tan x}\ \ dx$	39 June 4 , 2011
23	Evaluate the following $\int \frac{1}{(\cos x)-1}\ dx$ ($2\,{}^1/_2$ points)	56 11 December 2011